

MA1 cvičení – limita funkce

Vypočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow -3} (x+3)^2; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+1}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \ln(x^2-3); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x+2};$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} x e^{x^2-3}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x;$$

Návod: funkce ve všech příkladech z a) jsou spojité v bodech, kde máme určit limitu, tedy zde $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2. „Jednoduché“ limity:

$$\text{aritmetika limit „s nekonečnem“: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)^2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{(x+3)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+3x+1); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3x+1);$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+3x+1); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+3x^2+1); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x+x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot \ln x); \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\ln x+2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x+2};$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x-1}$$
$$\text{limity „typu } \frac{1}{0} \text{“: } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{(x+3)^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-1}{x+3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+1}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\ln(x+2)};$$
$$\text{limity „typu } \frac{0}{0} \text{“: } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2};$$
$$\text{limity „typu } \frac{\infty}{\infty} \text{“: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{3-x^2}.$$

3. Trošku „těžší“ limity typu „ $\frac{0}{0}$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, „ $\infty-\infty$ “:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x};$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x}); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x).$$

4. Limita složené funkce (zde $\exp(x) = e^x$):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{3-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \exp\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \ln(x^2-1);$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2-1); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vysvětlení: ? v příkladech, kde je zadána $\lim_{x \rightarrow ?} f(x)$, znamená výzvu – určete nejprve všechny body,

kde je užitečné znát limitu dané funkce a pak limity funkce v těchto bodech spočítejte.

A pro další cvičení trochu těžší příklady limit složených funkcí (pokročilejší „čtenáři“ mohou si počítat hned):

5*. Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, spočítejte limity (nebo ukažte, že neexistují):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin \sqrt{x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right).$$

6*. Víme-li, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 - \frac{2}{x}\right).$$

$$\text{b) Definujme } f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}. \text{ Spočítejte } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

7. Užití věty o limitě sevřené funkce:

$$\text{vypočítejte limity: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x).$$

8*. Ukažte, že neexistují limity: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sin x).$

9. Limity s cyklometrickými funkcemi $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ (spočítejte limity, nebo ukažte, že neexistují):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{x-1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2 - x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x^2 - x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right); \quad \lim_{x \rightarrow ?} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

10*. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f , která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad \text{b)} & f(x) = \frac{\ln(4x^2 + 1)}{x^2} & ; \quad \text{c)} & f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} ; \\ \text{d)} & f(x) = x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad \text{e)} & f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x & ; \quad \text{f)} & f(x) = \sin \frac{1}{x} . \end{array}$$

Návod: Funkce $f(x)$ je podle definice spojitá v bodě $a = 0$, když platí, že $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$;

tedy, pokud má funkce $f(x)$ v bodě $a = 0$ vlastní limitu $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L, L \in \mathbb{R}$, když dodefinujeme funkci v bodě $a = 0$ touto limitou, tj. $f(0) = L$, bude funkce $f(x)$ v bodě $a = 0$ spojitá.

A pro „zájemce“ – můžete si zkusit „důkazy“ (řešení bude napsáno, ale zkuste si to dříve sami):

1*. Z definice limity ukažte:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 4 ; \quad \text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x} = 0 ; \quad \text{c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty ; \quad \text{d)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 .$$

2*. Ukažte, že platí:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$$

$$\text{(b)} \quad \text{Je-li } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \text{ a funkce } g(x) \text{ je omezená v nějakém prstencovém okolí bodu } c, \text{ pak i } \lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = 0 .$$